جامعة تشرين
سلم تصحيح مقرر **الرياضيات (2)**
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية قسم الميكاترونيك
الفصل الأول للعام 2021-2022
السنة الأولى من مقررات الفصل الثاني

السؤال الأول: بالنسبة للتكامل الأول نجري التحويل $x^3 = t \Rightarrow 3x^2\,dx = dt$ نبدل في التكامل نجد:

$$I_1 = \int x^2 \sin x^3\, dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{3}\cos t + c \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$$

وأن القيمة الوسطى تعرف بالعلاقة:

$$\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{3}}} x^2 \sin x^3 dx = f(x_0)\left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{3}} - 0\right) \Rightarrow f(x_0) = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\left(-\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$$

التكامل الثاني: يحسب التكامل بطريقة التكامل بالتجزئة، حيث:

$$u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ dv = \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow v = 2\sqrt{1+x}$$

$$I_2 = 2\sqrt{1+x}\arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\sqrt{1+x}\arcsin x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{1+x}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + c$$

التكامل الثالث :

$$\int \frac{5x\,dx}{2x^2+4x+3} = \frac{5}{4}\int \frac{4x+4-4}{2x^2+4x+3}dx = \frac{5}{4}\int \frac{4x+4}{2x^2+4x+3}dx - 5\int \frac{dx}{2x^2+4x+3} =$$

$$= \frac{5}{4}\ln\left(2x^2+4x+3\right) - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{5}{4}\ln\left(2x^2+4x+3\right) - \frac{5}{\sqrt{2}}\, arctg\, \sqrt{2}(x+1)^2 + c$$

التكامل الرابع

$$I_4 = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos x} = 2\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sin 2x} = 2\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x \cdot \sin^2 2x} = 4\int \frac{\sin 2x dx}{(1-\cos 2x)\cdot\left(1-\cos^2 2x\right)}$$

$$1 - \cos 2x = t \Rightarrow dt = 2\sin 2x dx \Rightarrow I_4 = 2\int \frac{2dt}{t^2\cdot(2-t)} = \int \frac{A_1 dt}{t^2} + \int \frac{A_2 dt}{t^2} + 2\int \frac{Bdt}{2-t}$$

$$I_4 = \int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2-t} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{2}\ln|2-t| + c$$

2- إن التكامل المحدد $\int_{\frac{1}{2}}^{2}(1-x)\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{3}{8}$ لا يساوي المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = 1-x$ والمستقيمين $x = \frac{1}{2},\ x = 2$ والمحور ox، وذلك لأن الدالة لا تحافظ على إشارة واحدة على كامل المجال.

3- - إن التكامل شاذ من النوع الأول يمكن البرهان على تقاربه بالمقارنة من أجل قيم $x \in [1,\infty[$، مع التكامل المتقارب $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$،

حيث أن $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} < \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ الأكبر متقارب فالأصغر متقارب

السؤال الثاني: 1- الدالة معرفة من أجل $x^2 + 2y^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 > 1$ وهي تمثل مجموعة النقاط من المستوي $\mathbb{R}^2$ باستثناء النقط الواقعة داخل ومحيط القطع الناقص أنصاف أقطاره على المحور ox مساوية الواحد وعلى oy مساوية $\frac{1}{2}$ ومركزه النقطة $(0,0)$. أما بالنسبة للاستمرار إن الدالة معرفة في النقطة $(2,0)$ لذلك هي مستمرة في تلك النقطة.c) النقطة تقع خارج منطقة التعريف بالتالي الدالة غير مستمرة فيها.

2) بالتعريف لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2uv\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}+u^2v\frac{y}{x}=2x^y\cdot\arcsin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}+\left(\arcsin\frac{x}{y}\right)^2 x^y\cdot\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2uv\cdot\frac{x}{y}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}+u^2v\ln x=-2x^y\cdot\frac{x}{y}\arcsin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}+\left(\arcsin\frac{x}{y}\right)^2 x^y\cdot\ln x$$

وبالنسبة للتفاضل التام يحدد وفق العلاقة: $df=f'_x\,dx+f'_y\,dy$ نبدل المشتقات الجزئية بما يساويها فنحصل على التفاضل المطلوب.

3- لتحديد النقاط الموضعية القصوى نبحث في الشرط اللازم والكافي وفق العلاقات الآتية

$$\left.\begin{aligned}(1)\ \ f'_x&=(x+y)^2-y\\(2)\ \ f'_y&=(x+y)^2-x\end{aligned}\right\}\overset{-}{\Rightarrow} y-x=0\Rightarrow y=x\overset{(2)}{\Rightarrow}4x^2-x=0\Leftrightarrow x(4x-1)=0$$

$$x_1=0\Rightarrow y_1=0\ :\ M_1(0,0)\ ,\ \ x_2=\frac{1}{4}\Rightarrow y_2=3\ :M_2(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$$

$$f''_{x^2}=2(x+y)\ ,\ f''_{y^2}=2(x+y)\ ,\ \ f''_{xy}=2(x+y)-1$$

$$D(x,y)=f''_{x^2}\cdot f''_{y^2}-f''_{xy}{}^2=4(x+y-4)^2-[2(x+y-4)-1]^2$$

$$D(M_1)=0-1=-1<0\ \ ,f''_{x^2}(M_1)=\frac{10}{2}>0\qquad,\ \ D(M_2)=\frac{1}{4}>0$$

a) ينتج أن للدالة نقطة موضعية قصوى واحدة هي M_2 فيها $f''_{x^2}(M_2)=1>0$ فهي موضعية صغرى قيمتها:

$$f(M_1)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{16}$$

b) $y'=-\dfrac{(x+y)^2-y}{(x+y)^2-x}=\dfrac{3}{3}=1$